

Appendice

Tassi di preferenza ai singoli partiti per circoscrizioni nelle elezioni dal 1968 al 1983 (con relative variazioni) . . . » 139

Rubriche

PIER VINCENZO ULERI - Le elezioni nel mondo . . . » 151

Europa:

— Austria . . . » 151

Paesi extraeuropei:

— Brasile . . . » 156
— Colombia . . . » 159
— Giappone . . . » 162
— Malaysia . . . » 165
— Stati Uniti . . . » 167

ANTONIO AGOSTA - Le elezioni in Italia . . . » 171

— Tendenze del voto e potere locale: alcune riflessioni sul ciclo amministrativo . . . » 171
Le elezioni comunali del secondo semestre 1986 ed il ciclo amministrativo dell'ultimo triennio . . . » 172
La distribuzione del potere locale: consiglieri e membri di giunta nelle amministrazioni regionali e provinciali » 176

Notiziario

Il gruppo di studio . . . » 183
Appuntamenti elettorali in Toscana . . . » 185
Sommari dei nn. 1-17 . . . » 187

IL VOTO IN TOSCANA NELLE ELEZIONI COMUNALI DEL 1980 E DEL 1985. ALCUNI INDICI PER L'ANALISI DEI RISULTATI

di ENRICO GORI

1. Premessa

L'analisi dei risultati elettorali, ed in particolare delle variazioni nelle percentuali ottenute dai singoli partiti, necessita di indici sintetici, facilmente calcolabili a partire dai risultati relativi a consultazioni elettorali successive (in diverse sezioni elettorali, o comuni), capaci di mettere in risalto, con immediatezza, quali siano stati i principali fattori determinanti le «vittorie» o le «sconfitte» delle varie liste (Amato, 1962; Brown e Payne, 1975; Fabbris, 1979; Barbagli et al., 1979; Gori, 1986 a, b; Brown e Payne, 1986).

Scopo di questo lavoro è quello di proporre, in tale senso, alcuni indicatori di semplice applicazione, volti a determinare e misurare il ruolo che certi fattori, quali la mortalità, l'attrazione nei confronti dei giovani elettori, la capacità di conservazione dell'elettorato ecc., hanno nel determinare la dinamica elettorale. Si premette tuttavia che, proprio per la limitatezza delle informazioni necessarie alla loro costruzione, gli indici proposti potranno risultare carenti sotto il profilo della comprensione delle ragioni politiche, economiche e sociali di tale dinamica, le quali necessitano di dati ed analisi d'altro tipo.

Gli indici vengono costruiti a partire dalle stime delle «probabilità di transizione» degli elettori tra i partiti, proposte in recenti lavori (Gori, 1986 a, b; Brown e Payne, 1986): la metodologia in oggetto viene brevemente riassunta nel paragrafo 4. Viene fornita inoltre un'appendice riguardante le elezioni comunali in Toscana, nel 1980 e nel 1985.

2. Gli indici

Una premessa di carattere generale riguarda il «contributo informativo» degli indici proposti. Essi, infatti, tendono a fornire una spiegazione delle variazioni dei rapporti *voti ottenuti (dal singolo partito) / totale elettori*, e non dei rapporti *voti ottenuti / voti validi* (si precisa che anche *schede bianche, nulle e astenuti* vengono considerati quali «partiti»). Risulta comunque che tra le due entità esiste una relazione abbastanza stretta (in particolare il loro coefficiente di correlazione lineare è superiore a 0.90,

Questo lavoro è stato finanziato con fondi del Ministero della Pubblica Istruzione (40%), nell'ambito di un più generale progetto di ricerca su «Stima ed identificazione di processi stocastici». Tuttavia, esso è stato reso possibile, in parte, anche grazie ad una convenzione tra il Dipartimento Statistico e la Regione Toscana.

per la maggior parte dei partiti, nei dati comunali delle elezioni '80/'85 in Toscana).

Si introducono le seguenti notazioni e definizioni:

- $N(v)$ = no. di elettori al tempo v ;
- $R(v)$ = no. di nuovi elettori al tempo v ;
- $D(s,t)$ = no. di decessi nell'intervallo di tempo (s,t) ;
- $n_i(v)$ = no. di voti per il partito i -esimo al tempo v ;
- $R_i(v)$ = no. di nuovi elettori che votano per il partito i -esimo al tempo v ;
- $D_i(s,t)$ = no. di decessi in (s,t) di elettori che avevano votato per il partito i -esimo al tempo s ;
- $E_i(s,t)$ = no. di elettori che, al tempo t , votano per il partito i -esimo e, al tempo s , avevano votato per un partito diverso ($j \neq i$);
- $U_i(s,t)$ = no. di elettori che al tempo s avevano votato per il partito i -esimo e che, al tempo t , votano per un partito diverso ($j \neq i$).

Sulla base delle notazioni introdotte, date due consultazioni, una al tempo s , l'altra al tempo t ($s < t$), se indica con $r(s)$ ed $r(t)$ il numero di partiti nei due tempi, risulta soddisfatta la seguente eguaglianza (si suppongono inesistenti flussi migratori):

$$(1) \quad N(t) = N(s) + R(t) - D(s,t) = N(s) [1 + T(s,t)],$$

dove $T(s,t) = [R(t) - D(s,t)] / N(s)$, è interpretabile come «tasso di rinnovo naturale» dell'elettorato (rapporto tra il saldo nuovi elettori - elettori deceduti e la consistenza iniziale dell'elettorato). Ora, supposto che il partito i -esimo sia presente in entrambe le consultazioni, risulta anche che:

$$(2) \quad \begin{aligned} n_i(t) &= n_i(s) + R_i(t) + E_i(s,t) - U_i(s,t) - D_i(s,t) = \\ &= n_i(s) [1 + R_i(t)/n_i(s) + E_i(s,t)/n_i(s) - U_i(s,t)/n_i(s) - D_i(s,t)/n_i(s)]. \end{aligned}$$

Tenuto conto di tali relazioni, posto:

$$(3) \quad \begin{aligned} F_{1i}(s,t) &= R_i(t)/n_i(s) - R(t)/N(s); \\ F_{2i}(s,t) &= E_i(s,t)/n_i(s); \\ F_{3i}(s,t) &= -U_i(s,t)/n_i(s); \\ F_{4i}(s,t) &= D_i(s,t)/N(s) - D_i(s,t)/n_i(s); \end{aligned}$$

dopo semplici passaggi, si ottiene:

$$(4) \quad \begin{aligned} n_i(t)/N(t) - n_i(s)/N(s) = \\ = [n_i(s)/N(s)] [1 + T(s,t)]^{-1} [F_{1i}(s,t) + F_{2i}(s,t) + F_{3i}(s,t) + F_{4i}(s,t)]. \end{aligned}$$

Questa ultima relazione mostra che le variazioni nelle proporzioni di voti ottenuti dal partito i -esimo sono, da un lato, proporzionali ad un fattore dimensionale $n_i(s)/N(s)$, ed inversamente proporzionali ad un fattore «naturale», $[1 + T(s,t)]$, relativo alla dinamica della popolazione degli elettori, che risulta estraneo alle vicende politiche in senso stretto; dall'altro, il termine che determina, in sostanza, successi o sconfitte è costituito dalla somma algebrica dei 4 fattori definiti nella (3), i quali hanno una interpretazione immediata.

In particolare:

— F_{1i} misura il successo (o l'insuccesso, se negativo), che il partito i -esimo fa registrare nei confronti dei nuovi elettori (in quanto si è supposta l'assenza di flussi migratori) ⁽¹⁾. Se positivo indica che il partito i -esimo è riuscito a «rinnovare» il proprio elettorato ad un tasso $R_i(t)/n_i(s)$ superiore a quello medio $R(t)/N(s)$, dell'intero corpo elettorale; viceversa se negativo;

— F_{2i} , invece, misura in termini relativi il guadagno che il partito i -esimo realizza per effetto dell'attrazione esercitata nei confronti degli elettori degli altri partiti. Come si osserva, infatti, si tratta del rapporto tra $E_i(s,t)$, numero di altri elettori che votano per il partito i -esimo, e lo stock iniziale di elettori, $n_i(s)$, di tale partito; tale fattore risulta sempre maggiore od uguale a zero;

— F_{3i} misura, invece, la perdita subita dal partito i -esimo, per effetto dell'attrazione esercitata dagli altri partiti nei confronti del suo elettorato. Tale fattore risulta, all'opposto del precedente, inferiore od uguale a zero;

— F_{4i} , infine, costituisce un fattore di «mortalità differenziale». Se positivo, indica che gli elettori del partito i -esimo presentano un tasso di mortalità, $D_i(s,t)/n_i(s)$, inferiore a quello medio, $D(s,t)/N(s)$; viceversa se negativo. È chiaro che, se tale fattore è positivo, il partito in oggetto godrà di un vantaggio rispetto ad altri partiti, vantaggio che, tuttavia, è dovuto a fattori non politici. Viceversa, se negativo, il partito risulterà svantaggiato e subirà una perdita tendenziale (fermi restando gli altri fattori), ma, di nuovo, tale perdita non potrà essere attribuita a fattori politici ⁽²⁾.

Si conviene ora che il successo e l'insuccesso elettorale dei vari partiti dovrebbe essere misurato, essenzialmente, sulla base dei fattori F_{1i} , F_{2i} ed F_{3i} , mentre F_{4i} costituisce un fattore «naturale» estraneo, che dovrebbe essere valutato e tenuto ben distinto dagli altri, più prettamente legati a fattori «politici».

⁽¹⁾ Qualora i flussi migratori siano consistenti, tra i nuovi elettori saranno presenti anche gli elettori «immigrati», ma l'interpretazione del fattore F_{1i} rimane la stessa.

⁽²⁾ Di nuovo, qualora vi siano consistenti flussi migratori, il fattore F_{4i} risulterà influenzato anche da questi, nel senso che il tasso di mortalità del partito i -esimo risentirà anche della tendenza, dei suoi elettori, ad «emigrare».

Le quantità F_j sono, pertanto, gli indici sintetici che vengono proposti al fine di una migliore e, al tempo stesso, immediata, valutazione dei risultati elettorali. Si fa osservare che, ponendo $F_{4i} = 0$ nella (4), si ottiene la variazione teorica che si sarebbe registrata se il tasso di mortalità degli elettori del partito i -esimo fosse stato uguale a quello medio. Si pone ora il problema di come stimare tali indici.

3. La stima degli indici

Al fine di valutare gli indici sono necessarie stime delle quantità $R_i(t)$, $U_i(s,t)$, $E_i(s,t)$ e $D_i(s,t)$, mentre le quantità $N(s)$, $N(t)$, $R(t)$, $D(s,t)$ sono generalmente note. Ora, supponendo che per G sezioni elettorali o comuni, siano disponibili i seguenti dati:

$$\begin{aligned} n_{g_i}(v) &= \text{no. voti per il partito } i\text{-esimo, in } g, \text{ al tempo } v, i = 1, \dots, r(v), \\ g &= 1 \dots G, v = s, t; \\ R_g(t) &= \text{no. di nuovi elettori in } g \text{ al tempo } t, g = 1, \dots, G(?); \end{aligned}$$

sotto opportune ipotesi, ed utilizzando alcune metodologie (Gori, 1986 a, b; Brown e Payne, 1986), richiamate nel paragrafo 4, è possibile giungere ad una stima delle seguenti probabilità:

$$\begin{aligned} P_{ij}(s,t) &= \text{probabilità che un elettore che aveva votato per il partito } i\text{-esimo, al tempo } s, \text{ voti per il partito } j\text{-esimo, al tempo } t; \\ P_{0j}(t) &= \text{probabilità che un nuovo elettore voti per il partito } j\text{-esimo, al tempo } t; \\ d_i(s,t) &= \text{probabilità che un elettore che aveva votato per il partito } i\text{-esimo al tempo } s, \text{ muoia nell'intervallo di tempo } (s,t); \end{aligned}$$

ottenute le quali, si perviene facilmente ad una stima delle quantità cercate per il complesso delle G sezioni elettorali o comuni:

$$\begin{aligned} (5) \quad R_i(t) &= \sum_g R_g(t) P_{0i}(t), & D_i(s,t) &= \sum_g n_{g_i}(s) d_i(s,t) \\ E_i(s,t) &= \sum_g \sum_{j \neq i} n_{g_j}(s) P_{ji}(s,t) & U_i(s,t) &= \sum_g \sum_{j \neq i} n_{g_j}(s) P_{ji}(s,t) \end{aligned}$$

Nel seguente paragrafo si illustrano le ipotesi ed il metodo che permettono di giungere alla stima dei parametri sopra definiti. Per maggiori dettagli si veda comunque Gori (1986 a, b) e Brown e Payne (1986).

4. Metodologie per la stima delle probabilità di transizione

Si introducono le seguenti ipotesi:

a) le probabilità $p_{ij}(s,t)$, $d_i(s,t)$, $P_{0j}(t)$ $i = 1, \dots, r(s)$, $j = 1, \dots, r(t)$, dipendono soltanto dallo stato di partenza (il partito i per le prime due, e lo stato di «nuovo elettore» per la terza); le scelte di ogni individuo, regolate da tali probabilità, sono indipendenti da quelle degli altri individui;

b) nelle G sezioni elettorali, o comuni, le probabilità definite sopra sono identiche, nel senso che individui nello stesso stato i al tempo s hanno le stesse probabilità di modificare il loro stato, pur appartenendo ad unità (sezioni elettorali o comuni) differenti;

c) le popolazioni delle G unità sono indipendenti tra loro.

L'ipotesi che appare meno plausibile è, senza dubbio, l'ipotesi b), la quale asserisce, in pratica, che in ogni unità d'osservazione (sezione elettorale o comune) sia presente lo stesso tipo di dinamica elettorale (stessa mobilità degli elettori tra i partiti, stesso tasso di mortalità, stesse scelte dei nuovi elettori). Si vedrà più avanti come sia possibile, in parte, porre rimedio al fatto che questa possa non risultare soddisfatta.

Sotto tali ipotesi, definiti i seguenti vettori e matrici:

$$\begin{aligned} (6) \quad n_g(s) &= [n_{g,1}(s) \dots n_{g,r(s)}(s) R_g(t)], & n_g(t) &= [n_{g,1}(t) \dots n_{g,r(t)}(t)], \\ P(s,t) &= [P_{ij}(s,t) \mid i = 1, \dots, r(s), j = 1, \dots, r(t)] \\ P_0(t) &= [P_{0j}(t) \dots P_{0r(t)}(t)], & Q(s,t) &= [P'(s,t) : P'_0(t)]', \end{aligned}$$

tenuto conto della similarità con un processo multinominale (Bartholomew, 1973), vale allora la seguente espressione per il valore atteso di $n_g(t)$ condizionato ad $n_g(s)$:

$$(7) \quad E[n_g(t)/n_g(s)] = n_g(s) Q(s,t).$$

La matrice di varianze-covarianze di $n_g(t)$ condizionata ad $n_g(s)$ risulta pari a:

$$(8) \quad V_g = \text{Var} [n_g(t)/n_g(s)] = [I_{r(s)} \otimes n_g(s)] [\text{diag} [\text{vec } Q(s,t)]] \{ [I_{r(s)} \otimes I_{r(s+1)}] - [I_{r(s)} \otimes Q(s,t)] \};$$

dove I_r è la matrice identità di ordine r , I_r è un vettore colonna di r elementi pari ad 1, \otimes è il prodotto di Kroneker, vec è l'operatore che effettua la vettorizzazione di una matrice secondo le colonne (Henderson e Searle, 1981), $\text{diag}(b)$ è una matrice diagonale i cui elementi sono forniti dal vettore b ; tale espressione si ottiene dopo qualche manipolazione di matrici e vettori tenendo conto del fatto che, per le ipotesi introdotte, le

variabili casuali $n_{g,i}(t)$ sono assimilabili a somme di variabili casuali multinomiali, per cui si ha (Bartholomew, 1973):

$$\text{cov}[n_{g,i}(t), n_{g,q}(t)/n_g(s)] = \sum_{i=1}^{r(q)+1} n_{g,i}(s) p_{ij}(s,t) [d_{iq} - p_{iq}(s,t)],$$

dove $d_{iq} = 1$ se $j=q, 0$ se $j \neq q$, $n_{g,r(q)+1}(s) = R_g(t)$, $P_{r(q)+1,j}(s,t) = p_{0j}(t)$.
In generale la matrice (8) risulta non singolare se le probabilità di morte $d_j(s,t)$ non sono tutte uguali a zero.

Si introduce adesso il seguente vettore riga di variabili casuali:

$$(9) \quad e_g(t) = n_g(t) - [n_g(s) Q(s,t)],$$

allora, in virtù del valore atteso definito in (7), tenuto conto dell'ipotesi (c), è possibile scrivere il seguente modello di regressione di tipo cross-section:

$$(10) \quad n_g(t) = n_g(s) Q(s,t) + e_g(t), \quad E[e_g(t)/n_g(s)] = 0, \quad g = 1, \dots, G,$$

$$E[e'_g(t) e_h(t)/n_g(s)] = V_g \text{ se } g = h, \quad 0 \text{ se } g \neq h,$$

dove V_g è data dall'espressione (8). Il precedente modello ammette, attraverso l'impiego dell'operatore vec e della regola di vettorizzazione $\text{vec}(AB) = (C' \otimes A) \text{vec} B$ (Henderson e Searle, 1979, 1981), una semplificazione in forma matriciale compatta del tipo:

$$(11) \quad y = Xp + u, \quad E(u/X) = 0, \quad E(uu'/X) = S.$$

Le posizioni necessarie per ricondursi a tale forma sono:

$$(12) \quad y = \text{vec}n(t), \quad X = I_{r(t)} \otimes n(s), \quad p = \text{vec}Q(s,t), \quad u = \text{vec}e(t)$$

dove $e(t) = [e'_1(t) \dots e'_G(t)]'$, e $n(v) = [n'_1(v) \dots n'_G(v)]'$.

Per quanto concerne la matrice di varianze-covarianze S dei disturbi u , si consideri che:

$$(13) \quad u = \text{vec}e(t) = I_{G, r(t)} \text{vec}e'(t),$$

dove $I_{m,n}$ è la matrice ortogonale di permutazione definita in Henderson e Searle (1981), che può essere costruita nel seguente modo:

$$(14) \quad I_{m,n} = (e'_{n,i} \otimes e_{n,i})_{i=1, \dots, n, i=1, \dots, m};$$

dove $e_{n,i}$ è un vettore colonna con n componenti uguali a zero, tranne

quella nella i -esima posizione che risulta uguale ad uno. Tale matrice gode della proprietà:

$$(15) \quad (I_{m,n})' = I_{n,m}.$$

Allora la matrice di varianze-covarianze S di u , condizionata ad X , in vista della (13) e della (15), risulta pari a:

$$(16) \quad S = E(uu'/X) = E[\text{vec}e(t) (\text{vec}e(t))'/X] =$$

$$= I_{G, r(t)} E[\text{vec}e'(t) (\text{vec}e'(t))'/X] I_{r(t), G};$$

ma considerando il fatto che, per la definizione dell'operatore vec , risulta:

$$(17) \quad \text{vec}e'(t) = \text{vec}[e'_1(t) \dots e'_G(t)] = [e_1(t) \dots e_G(t)]',$$

si avrà, tenuto conto della matrice di varianze-covarianze definita in (10), che:

$$(18) \quad E[\text{vec}e'(t) (\text{vec}e'(t))'/X] =$$

$$= [E(e'_g(t) e_h(t)/X)]_{g,h=1, \dots, G} = \bigoplus_{g=1}^G V_g'$$

dove \bigoplus è l'operatore di somma diretta (Graybill, 1983) che forma una matrice diagonale a blocchi con gli elementi che costituiscono l'argomento della somma.

Se si sostituisce la (18) nella (16) si ottiene infine:

$$(19) \quad S = E(uu'/X) = I_{G, r(t)} (\bigoplus_g V_g) I_{r(t), G}.$$

Se si dispone, pertanto, dei dati cross-section y ed X , come definiti in (12), risulta possibile ottenere una stima dei parametri di mobilità elettorale, stimando semplicemente i parametri p del modello di regressione lineare specificato in (11).

Si fa notare che, se le ipotesi su cui si basa la sua costruzione sono soddisfatte, la relazione esistente tra le osservazioni y e le variabili esplicative X è proprio di tipo lineare, a meno di un errore stocastico, e pertanto il modello (11) non presenta errori di specificazione sotto questo punto di vista.

Sia dato quindi il modello (11) su cui si farà l'ulteriore ipotesi:

d) $G > \max[r(s)+1, r(t)]$ e che inoltre X sia di rango massimo.
Al fine di stimare i parametri p , si possono considerare stimatori di minima distanza che soddisfino la condizione:

$$(20) \quad \min_p (y - Xp)' M (y - Xp),$$

dove M è un'opportuna matrice simmetrica, non negativa definita, per la quale sono possibili scelte diverse che danno luogo a stimatori diversi. Sarebbe ovviamente possibile ricorrere anche a stimatori di massima verosimiglianza, facendo uso del fatto che, condizionatamente a $n_g(s)$, sotto le ipotesi introdotte, il numero di individui che passano dallo stato i agli $r(t)$ stati, sono delle variabili casuali multinomiali indipendenti (Anderson e Goodman, 1957; Bartholomew, 1973), ma questi risultano di più difficile trattazione, e d'altronde appare possibile, alla luce di altri risultati (Lee et al., 1970; Brown e Payne, 1986), stabilire, almeno in grandi campioni, non inusuali nel caso di dati aggregati, un'equivalenza tra stime di massima verosimiglianza e stime di minima distanza, in particolare dei minimi quadrati generalizzati.

Nel caso del modello (11) i parametri p sono la vettorizzazione della matrice $Q(s, t)$, che deve risultare substocastica (somma per riga inferiore od uguale ad 1) rispetto alle prime $r(s)$ righe e stocastica (somma uguale 1) per l'ultima riga, e con elementi non negativi. È ovvio pertanto che gli stimatori di p debbano soddisfare le seguenti condizioni:

$$(21) \quad (I'_{r(s)} \otimes K_{(s)}) p \leq I_{r(s)},$$

$$(22) \quad (I'_{r(t)} \otimes e'_{r(s)+1, r(s)+1}) p = A p = 1,$$

$$(23) \quad p \geq 0,$$

dove $K_{(s)} = (I_n : I_{r(s)})$. Se nella (20) si pone $M = I$ si ottengono stimatori dei minimi quadrati (ols), che verranno indicati con p_{ols} :

$$(24) \quad p_{ols} = (X' X)^{-1} X' y.$$

Tali stimatori, come è facile convenire, sono corretti e, sotto certe condizioni (Gori, 1986 a, b), anche consistenti per $G \rightarrow \infty$. La loro matrice di varianze-covarianze risulta pari a:

$$(25) \quad D_{ols} = (X' X)^{-1} X' S X (X' X)^{-1}.$$

Tuttavia p_{ols} non soddisfa necessariamente la condizione (22). Qualora si proceda a minimizzare la (20) con $M = I$, sotto la condizione (22), si ottengono degli stimatori dei minimi quadrati ordinari ristretti (olstr), che verranno indicati con p_{olstr} :

$$(26) \quad p_{olstr} = p_{ols} + (X' X)^{-1} A' [A (X' X)^{-1} A']^{-1} (1 - A p_{ols}),$$

14

e la cui matrice di varianze-covarianze è data da:

$$(27) \quad D_{olstr} = B_1 D_{ols} B_1',$$

$$\text{dove } B_1 = I_{r(t)(r(s)+1)} - (X' X)^{-1} A' [A (X' X)^{-1} A']^{-1} A,$$

e D_{olstr} è singolare, di rango $[r(t) (r(s) + 1)] - 1$, a motivo del vincolo (22). Qualora né gli stimatori p_{olstr} , né p_{ols} , soddisfino le condizioni di disuguaglianza (21) e (23), è necessario ricorrere a stimatori vincolati con vincoli di disuguaglianza (olsc), che si ottengono minimizzando la (20), con $M = I$, sotto i vincoli (21), (22), (23). Le proprietà degli stimatori olsc non sono di facile determinazione dal punto di vista analitico, ma possono essere indagate attraverso simulazione: nel caso di dati «time-series» (Lee et al., 1970) gli stimatori vincolati sembrano, comunque, possedere una maggiore efficienza di quelli non vincolati, e questo è abbastanza logico in quanto (21) e (23) costituiscono delle importanti informazioni a priori sui parametri stessi. La soluzione del problema di minimo (20) sotto i vincoli (21-23) è un problema di programmazione quadratica (Arthanari e Dodge, 1981) la cui soluzione verrà indicata nel prosieguo.

L'eteroschedasticità presente nel modello (11) indica, comunque, che gli ols non sono ottimali nell'ambito degli stimatori lineari corretti e suggerisce l'uso dei minimi quadrati generalizzati (gls), che si possono ottenere minimizzando la (20) con $M = S^{-1}$, che è invertibile, poiché, come si è visto, le V_g sono di rango massimo. Tali stimatori e la loro matrice di varianze-covarianze sono dati da:

$$(28) \quad p_{gls} = (X' S^{-1} X)^{-1} X' S^{-1} y, \quad D_{gls} = (X' S^{-1} X)^{-1}.$$

I p_{gls} , come gli ols non soddisfatto automaticamente la condizione (22), ma, minimizzando la (20), con $M = S^{-1}$, sotto la (23), si possono ottenere stimatori dei minimi quadrati generalizzati ristretti (glstr):

$$(29) \quad p_{glstr} = p_{gls} + (X' S^{-1} X)^{-1} A' [A (X' S^{-1} X)^{-1} A']^{-1} \times \\ \times (1 - A p_{gls}),$$

con varianze-covarianze:

$$(30) \quad D_{glstr} = B_2 D_{gls} B_2' = B_2 D_{gls} = D_{gls} B_2',$$

$$\text{dove } B_2 = I_{r(t)(r(s)+1)} - D_{gls} A' (A D_{gls} A')^{-1} A.$$

Anche D_{glstr} risulta singolare, di rango $[r(t) (r(s) + 1)] - 1$, per il vincolo (22). Qualora neanche gli stimatori glstr soddisfino le condizioni richieste,

15

si potranno ottenere stime glsc minimizzando la (20), con $M = S^{-1}$, sotto (21), (22) e (23).

La soluzione dei problemi di minimo vincolato indicati in precedenti, è un tipico problema di programmazione quadratica, risolvibile attraverso algoritmi basati sul metodo del semplice, proposti da vari autori (Wolfe, 1959; Rey e Theil, 1966; Arthanari e Dodge, 1981). Specie per la facile formalizzazione in termini matriciali e la maggiore efficienza rispetto ad altri, sembra comunque opportuno fare riferimento all'algoritmo proposto da Jagannathan (1966). Tale algoritmo permette di risolvere problemi del tipo:

$$(31) \quad \min_{x \geq 0} (1/2) x' C x + c' x$$

$$(32) \quad Ax \leq b$$

dove x è un vettore ($n \times 1$) di incognite, C è una matrice simmetrica semidefinita positiva, A una matrice ($m \times n$), c un vettore ($n \times 1$) e b un vettore ($m \times 1$), di coefficienti noti. Eventuali vincoli in forma di disuguaglianza, del tipo $Ax = b$, vanno posti nella forma (32), per mezzo delle espressioni equivalenti: $Ax \leq b$, $-Ax \leq -b$.

L'algoritmo permette di raggiungere l'unica soluzione del problema in un numero massimo di $(m+n)^{2(m+n+1)}$ iterazioni del metodo del semplice. Le posizioni necessarie per risolvere i problemi di programmazione quadratica inerenti la determinazione di P_{obs} o P_{glsc} , dove ovviamente $x = p$, sono i seguenti:

$$(33) \text{ olsc: } C = 2 X' X, \quad c = -2 X' y,$$

$$(34) \text{ glsc: } C = 2 X' S^{-1} X, \quad c = -2 X' S^{-1} y,$$

$$(35) \text{ olsc - glsc: } A = \begin{bmatrix} I'_{r(t)} \otimes K_{r(t)} \\ I'_{r(t)} \otimes e'_{r(t)+1, r(t)+1} \\ -I'_{r(t)} \otimes e'_{r(t)+1, r(t)+1} \end{bmatrix}; \quad b = (I'_{r(t)+1} - 1)'$$

Si fa osservare che i gls non sono calcolabili direttamente poiché S dipende proprio dai parametri che si vogliono stimare. Al fine di determinare degli stimatori che abbiano, almeno asintoticamente (per $G \rightarrow \infty$), le buone proprietà di consistenza ed efficienza dei gls, si può utilizzare una procedura a due stati del tipo seguente:

- si sostituiscono i P_{obs} (consistenti) in S , ottenendo una stima consistente di S^{-1} ;
- si sostituisce tale stima in (28), e si ottengono stimatori che verranno indicati con \hat{p}_{glsc} .

Come è mostrato in Gori (1986 a, b), sotto certe condizioni, gli stimatori \hat{p}_{glsc} risultano asintoticamente equivalenti a p_{glsc} ed asintoticamente normali. La determinazione degli stimatori glsc può essere effettuata, pure, tramite una procedura a due stati del tipo descritto. Come nel caso olsc, le proprietà dei glsc sono di difficile derivazione analitica, ma alcuni risultati di simulazioni, non riportati in questa sede, indicano che i glsc sono più efficienti dei gls, come era apparso nel caso di dati «time-series», trattato da Lee et al. (1970).

Si fa osservare che, una volta ottenuta una stima della matrice $P(s, t)$, tenuto conto che $\sum_i p_{ij}(s, t) + d(s, t) = 1$, $i = 1, \dots, r(s)$, è possibile ricavare una stima del vettore delle probabilità di morte $d(s, t) = [d_1(s, t) \dots d_{r(s)}(s, t)]'$, dalla seguente espressione:

$$(36) \quad d(s, t) = I_{r(s)} - P(s, t) I_{r(t)}$$

Un problema che merita una certa attenzione è quello di valutare cosa accada quando si procede all'aggregazione di più liste (partiti) in un'unica lista. La necessità di una tale operazione può sorgere per vari motivi, tra cui l'esigenza di ridurre i tempi di calcolo, o il fatto che in ogni unità il numero di liste deve essere identico. Questa operazione, tuttavia, non può essere effettuata indiscriminatamente e, se fatta in modo inopportuno, può stravolgere i presupposti del modello e compromettere le stime dei parametri. Come osserva Medhi (1982, p. 92), infatti, se si raggruppano gli stati di una catena di Markov (o di un processo multinomiale come in questo caso), il processo risultante, in generale, non è più markoviano e pertanto non vale più l'espressione (7), su cui si fonda il modello di regressione e gli stimatori fin qui presentati. In generale, quindi, occorre evitare di fare ricorso al raggruppamento di stati, cosa che, invece, avviene di frequente, specie quando si applicano modelli markoviani a dati aggregati in serie storica (per esempio all'analisi della mobilità elettorale). Nel presente caso, di dati cross-section in due istanti di tempo, è tuttavia possibile effettuare aggregazioni di stati purché queste avvengano in modo opportuno, come si viene meglio a specificare di seguito.

Si definisce un nuovo stato k , al tempo t , costituito da m degli $r(t)$ stati del processo: $k = (j_1, \dots, j_m)$; si avrà allora che:

$$n_k(t) = \sum_{j \in k} n_j(t) = \sum_{j \in k} \sum_{i=1}^{r(t)} n_{ij}(s, t), \quad \text{da cui}$$

$$E[n_k(t)/\pi(s)] = \sum_{j \in k} \sum_i E[n_{ij}(s, t)/\pi(s)] = \\ = [\sum_i n_i(s)] [\sum_{j \in k} P_{ji}(s, t)] = \sum_i n_i(s) p_{ik}(s, t);$$

così, avendo definito le nuove probabilità di transizione $p_{ik} = \sum_{j \in k} P_{ji}$,

l'espressione precedente costituisce un modello del tutto analogo a (7). Si deduce, pertanto, che l'aggregazione di stati al tempo t non stravolge i presupposti del modello e comporta soltanto che anziché stimare i parametri p_i si stimi la loro somma rispetto agli stati aggregati. Le aggregazioni di stati al tempo s conducono invece, in generale, ad un'erronea applicazione dei modelli, in quanto non risulta più necessariamente vera l'espressione (7). Questa, pertanto, è un'operazione che va evitata.

Tutta la metodologia e le stime presentate si fondano pesantemente sull'ipotesi (c), ovvero che le probabilità di transizione siano identiche in tutte le unità d'osservazione (sezioni elettorali, comuni ecc.); tale ipotesi è sostanzialmente quella di assenza di mistura. Tuttavia essa appare piuttosto irrealistica per cui si pone l'esigenza di un'opportuna procedura in grado di risolvere tale problema. In Gori (1986 a, b) viene proposta la metodologia descritta qui di seguito.

Si supponga, per semplicità, che le G osservazioni provengano da una mistura finita di k processi, con matrici di probabilità di transizione $Q^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, k$, e che in particolare vi siano G_i osservazioni governate da $Q^{(i)}$, $G = G_1 + \dots + G_k$.

Si osserva allora quanto segue:

1) Se si applica l'operatore vec e le sue proprietà, è possibile esprimere il modello (11) nella forma:

$$(37) \quad y_i = X_i p^{(i)}, \quad i = 1, \dots, k,$$

dove $p^{(i)} = \text{vec} Q^{(i)}$, e y_i, X_i sono le corrispondenti quantità y e X , definite in (6) e (12) per il gruppo di osservazioni i -esimo; dall'applicazione degli ols si ottiene:

$$(38) \quad p_{ib} = (\sum_j X_j' X_j)^{-1} \sum_j X_j' y_j = \sum_i (\sum_j X_j' X_j)^{-1} X_i' y_i.$$

Supposto che per ogni gruppo di G_i osservazioni sia soddisfatta l'ipotesi (d), applicando Rao (1973, p. 33) si ottiene:

$$(39) \quad (\sum_i X_i' X_i)^{-1} = (X_i' X_i + \sum_{j \neq i} X_j' X_j)^{-1} = M_i (X_i' X_i)^{-1},$$

dove

$$(39') \quad M_i = I - (X_i' X_i)^{-1} [(X_i' X_i)^{-1} + (\sum_{j \neq i} X_j' X_j)^{-1}]^{-1}, \quad \sum_i M_i = I.$$

Sostituendo la (39') nella (38) e calcolando il valore atteso (condizionato alle X_i), si ottiene:

$$(40) \quad E(p_{ib}^{(i)}) = E[\sum_j M_j (X_j' X_j)^{-1} X_i' y_j] = \sum_j M_j E(p_{ib}^{(j)}) = \sum_j M_j p^{(j)},$$

dove $p_{ib}^{(j)} = (X_j' X_j)^{-1} X_j' y_j$. In presenza di mistura (finita), pertanto, gli ols risultano essere una «media» degli ols dei singoli gruppi componenti la mistura, e questo vale anche per il loro valore atteso. Un simile risultato vale, come è facile verificare, anche per gli stimatori di massima verosimiglianza calcolabili su dati non aggregati.

2) Sia data una matrice di probabilità di transizione $Q = (q_1 : q_2 : \dots : q_{n(i)})$, dove q_i rappresentano i vettori colonna di Q ; analogamente, si indichino con $Q^{(i)}$ e $q_i^{(i)}$, $i = 1, \dots, k$, le matrici di probabilità di transizione della mistura e le loro colonne. Si indichi con:

$n_{g,i}^{(i)}(v) =$ (no. di individui del gruppo g -esimo, dell' i -esimo processo, nello stato j al tempo v)

e con $n_k^{(i)}(v)$ la corrispondente espressione vettoriale. Si definiscono allora le seguenti statistiche:

$$(41) \quad v_{g,i}^{(i)} = [n_{g,i}^{(i)}(t) - n_{g,i}^{(i)}(s)] / s_{g,i}^{(i)}(q_i), \\ g = 1, \dots, G, \quad j = 1, \dots, r(t), \quad i = 1, \dots, k,$$

dove

$$s_{g,i}^{(i)}(q_i) = [\sum_{s=1}^{r(t)} n_{g,i}^{(i)}(s) p_{g,i}(1 - p_{g,i})]^{1/2}.$$

Le statistiche $v_{g,i}^{(i)}$, che saranno definite «residui standardizzati», e che hanno distribuzione asintotica di tipo $N(0, 1)$ (Gori, 1986 b), possono servire al fine di identificare i gruppi che formano la mistura. Infatti, se tra le osservazioni vi è un sottinsieme governato da una matrice di probabilità di transizione $Q^{(i)}$, con $q_i^{(i)} < q_i$, dove q_i è la stima ols , o gls , che, come già evidenziato, è interpretabile come una media delle corrispondenti stime di $q_i^{(i)}$, $i = 1, \dots, k$, allora i residui standardizzati $v_{g,i}^{(i)}$ tenderanno ad assumere valori negativi; viceversa, se $q_i^{(i)} > q_i$. Tali residui tenderanno ad assumere, poi, valori tanto più elevati in valore assoluto, quanto maggiori saranno le differenze tra $q_i^{(i)}$ e q_i . Va ovviamente ribadito il fatto, però, che tali residui possono avere medio zero anche se $q_i^{(i)} \neq q_i$, per effetto di possibili compensazioni, e che pertanto un valore vicino a zero o , comunque, compreso nell'usuale intervallo di accettazione per una variabile casuale $N(0, 1)$, non implica necessariamente che $q_i^{(i)} = q_i$.

Al fine di individuare i gruppi omogenei di osservazioni (quanto alle

probabilità di transizione) che compongono la mistura si potranno allora applicare tecniche di cluster analisi. Un possibile procedimento di classificazione automatica che sembra possedere una certa efficacia nel separare la mistura ed individuare cluster omogenei, è il seguente (Gori, 1986 a, b):

- a) si stabilisce a priori il numero k di cluster che si desidera individuare;
- b) si procede alla partizione delle G osservazioni in k gruppi, applicando, ad esempio, il metodo di Forgy (1965) alla matrice dei residui standardizzati;
- c) ottenuta la partizione di cui al punto b), si stimano separatamente i parametri per ciascuno dei k cluster individuati e si procede alla riattribuzione delle osservazioni ai k cluster in modo da minimizzare un opportuno «criterio» basato su un'opportuna «distanza».

Più in particolare, date G osservazioni, siano p delle stime dei parametri del modello (11). Si indichi con v la matrice $v = (v_1' \ v_2' \ \dots \ v_G')$, dove v_g è il vettore riga degli $r(t)$ residui standardizzati definiti in (41). Si procede quindi come segue:

A) Si determina in primo luogo una partizione $I(0) = [I_1(0) \ \dots \ I_k(0)]$ delle G osservazioni in K gruppi, in modo tale da minimizzare la devianza interna (Lebart et al., 1979, p. 401):

$$(42) \quad D_v(0) = \sum_{i=1}^k \sum_{g \in I_i(0)} [v_g - \bar{v}_i(0)] [v_g - \bar{v}_i(0)]',$$

$$(43) \quad \bar{v}_i(0) = \sum_{g \in I_i(0)} v_g / n[I_i(0)],$$

ed $n[I_i(0)] = \text{no. di osservazioni nel gruppo } I_i(0)$. A questo fine si può impiegare l'algoritmo proposto originariamente da Forgy (1965).

B) Data la partizione $I(0)$, di cui al punto A, si determina una nuova partizione $I(m) = [I_1(m) \ I_2(m) \ \dots \ I_k(m)]$ in modo che risulti minimizzata la quantità:

$$(44) \quad R(m) = \sum_{i=1}^k \sum_{g \in I_i(m)} d[lg; C_i(m)],$$

dove $d[lg; C_i(m)]$ rappresenta la «distanza» tra l'osservazione g -esima ed un opportuno «centro» $C_i(m)$ del gruppo $I_i(m)$. Alla determinazione di tale partizione ottimale si perviene attraverso i seguenti passi, simili nella sostanza al metodo di Forgy.

Passo 1 - Si pone $m = 0$ e $I(m) = I(0)$.

Passo 2 - Si determinano i centri $C_i(m)$ per la partizione $I(m)$.
 Passo 3 - Si procede alla formazione di una nuova partizione $I(m+1)$ delle G osservazioni in k gruppi $I_1(m+1) \ \dots \ I_k(m+1)$, secondo la regola di assegnazione:

$$g \in I_i(m+1) \text{ se } d[lg; C_i(m)] = \min_j d[lg; C_j(m)].$$

Si fa osservare che questo equivale a determinare la partizione $I(m+1)$ che minimizza il criterio:

$$(45) \quad r(m) = \sum_{g \in I(m+1)} d[lg; C_i(m)].$$

Passo 4 - L'algoritmo ha termine se $I(m) = I(m+1)$, o se $R(m)$ ed $R(m+1)$ non differiscono significativamente; altrimenti:

Passo 5 - Si pone $m = m + 1$ e si ritorna al passo 2.

L'algoritmo ha una giustificazione nella misura in cui, nel corso delle successive iterazioni, si riesce a far decrescere la quantità $R(m)$ (44). Questo accade se $C_i(m)$ e $d(\cdot; \cdot)$ vengono scelti in modo opportuno. In particolare si può porre:

$$(46) \quad \begin{aligned} C_i(0) &= p_i^{(0)} = (X_i^{(0)'} X_i^{(0)})^{-1} X_i^{(0)'} y_i^{(0)}, \\ C_i(m) &= p_i^{(m)} = [y_i^{(m)} - X_i^{(m)'} p_i^{(m)}]' W_i(m) [y_i^{(m)} - X_i^{(m)'} p_i^{(m)}] = \\ &= \min_p, \text{ per } m \geq 1 \end{aligned}$$

dove $y_i^{(m)}$ ed $X_i^{(m)}$ e $p_i^{(m)}$ sono i vettori e matrici definiti in (12), e $W_i(m)$ è una matrice positiva definita per la quale si possono considerare differenti opzioni cui corrispondono differenti scelte per $d(\cdot; \cdot)$. In particolare si considerino le seguenti alternative per $W_i(m)$ e $d(\cdot; \cdot)$:

$$(47) \quad \begin{aligned} {}_1 W_i^{(m)} &= I_{n[I_i(m)]}, & d_1[lg; C_i(m)] &= \\ &= [r_g(t) - r_g(s) Q_i^{(m)}]' [r_g(t) - r_g(s) Q_i^{(m)}]'; \end{aligned}$$

$$(48) \quad {}_2 W_i^{(m)} = I_{n[I_i(m), r(t)]} \left[\bigotimes_{g \in I_i(m)} V_g^{-1} (p_i^{(m-1)}) \right] I_{r(t), n[I_i(m)]},$$

dove $V_g [p_i^{(m-1)}]$ è la matrice (8) calcolata in $p = p_i^{(m-1)}$ ottenuto da (46) sui dati del gruppo $I_i(m-1)$ della partizione $I(m-1)$,

$$(49) \quad \begin{aligned} & d_2[lg; C_i(m)] = \\ &= [r_g(t) - r_g(s) Q_i^{(m)}]' V_g^{-1} [p_i^{(m-1)}] [r_g(t) - r_g(s) Q_i^{(m)}]'. \end{aligned}$$

In base a tali opzioni, $R(m)$ ed $r(m)$ assumono le seguenti espressioni:

$$(50) \quad R(m) = \sum_{i=1}^k [y_i^{(m)} - X_i^{(m)} p_i^{(m)}]' \quad W_i(m) [y_i^{(m)} - X_i^{(m)} p_i^{(m)}],$$

$$(51) \quad r(m) = \sum_{i=1}^k [y_i^{(m+1)} - X_i^{(m+1)} p_i^{(m)}]' \quad W_i(m) [y_i^{(m+1)} - X_i^{(m+1)} p_i^{(m)}],$$

si può mostrare ora che:

$$(52) \quad r(m) \geq R(m+1) \geq r(m+1),$$

da cui consegue che $R(m)$ decresce nel corso delle successive iterazioni. La seconda disuguaglianza è una conseguenza diretta del modo in cui la partizione $[m+1]$ viene ottenuta dal passo 3. Per mostrare la prima parte della disuguaglianza si consideri che, essendo:

$$(53) \quad p_i^{(m)} = [X_i^{(m)}]' W_i(m) X_i^{(m)-1} X_i^{(m)} W_i(m) y_i^{(m)},$$

se si toglie e si aggiunge $X_i^{(m+1)} p_i^{(m+1)}$ nelle espressioni in parentesi, in (51), dopo semplici passaggi si ottiene:

$$(54) \quad r(m) = R(m+1) + \sum [p_i^{(m+1)} - p_i^{(m)}]' X_i^{(m+1)}' \times \\ \times W_i(m+1) X_i^{(m+1)} [p_i^{(m+1)} - p_i^{(m)}].$$

Si fa notare che:

a) le opzioni (47) e (48) equivalgono a calcolare su ciascun gruppo della partizione gli stimatori ols e gls, rispettivamente;

b) nel caso si utilizzi (48) è necessario che i $p_i^{(m)}$ soddisfino gli usuali vincoli (non negatività ecc.), pertanto, in qualche caso sarà necessario fare ricorso a stimatori vincolati. Se si indicano con $r^*(m)$ ed $R^*(m)$ espressioni analoghe a (50) e (51), ottenute con gli stimatori vincolati, risulterà che $R^*(m) \geq R(m)$, $R^*(m+1) \geq r^*(m+1)$, ma affinché $r^*(m) \geq R^*(m+1)$ occorre che $R^*(m+1) - R(m+1) \geq a$, dove a è il secondo addendo della (54); questo non si verifica necessariamente, e pertanto può accadere che $R(m)$ non decresca in tutte le iterazioni;

c) la scelta di (48) nei confronti di (47) appare comunque più opportuna in quanto, di volta in volta, i parametri dei singoli gruppi vengono stimati con maggiore efficienza, ma questo è un problema che necessita di ulteriori approfondimenti;

d) quando $r(s)$, $r(t) \geq 5$, l'applicazione dell'algoritmo di programmazione quadratica, ove necessario, può comportare un notevole dispendio di tempo macchina il che può rendere onerosa la procedura di classificazione, specie se si utilizza (48). Al fine di contenere i tempi di calcolo, ove

necessario, si può ridurre il numero di stati al tempo t , aggregandone alcuni. Questo, come già fatto rilevare, non induce errori di specificazione nel modello.

Un modo alternativo a quello esposto, per risolvere il problema della eterogeneità dei parametri tra le G osservazioni, è quello di supporre che tali parametri siano funzione di variabili esplicative che assumono differenti valori nelle G osservazioni (struttura per classi sociali, e per età dell'elettorato ecc.). Su questo argomento si vedano Brown e Payne (1986). La metodologia proposta da Cori (1986 a, b), ed esposta in precedenza, ha tuttavia il pregio di individuare gruppi omogenei senza dovere fare ricorso a variabili esplicative la cui individuazione non sempre ovvia, aggrava notevolmente i costi dell'analisi specie se lo scopo è, come nel caso del presente lavoro, quello di fornire dei semplici ed immediati indici per l'interpretazione dei risultati elettorali.

5. Un'applicazione: le elezioni comunali 1980-1985 in Toscana

A fini esemplificativi gli indici proposti sono stati applicati all'analisi dei risultati elettorali in Toscana nelle due consultazioni comunali del 1980 e del 1985. Le liste presenti al tempo $s = 1980$ sono risultate $r(s) = 11$:

1. PCI
2. DC
3. PSI
4. MSI
5. PSDI
6. PRI
7. PLI
8. DP
9. PDUP
10. BIANCHE + NULLE
11. ASTENUTI

mentre quelle presenti al tempo $t = 1985$ sono state ridotte a $r(t) = 8$ (come è stato esposto nel paragrafo precedente, questo non induce errori di specificazione) per ridurre i tempi di calcolo:

1. PCI
2. DC
3. PSI
4. MSI
5. PRI + PSDI + PLI
6. DP + VERDI
7. ALTRE
8. BIANCHE + NULLE + ASTENUTI

I dati $n_{g_i}(v)$ $v = s, t$, relativi ai voti per tali liste risultavano disponibili a livello comunale per $i G = 287$ comuni toscani. Essendo i flussi migratori di natura modesta, si è proceduto a stimare il numero di nuovi elettori al tempo $t = 1985$, utilizzando la (1) ed il numero di morti tra il 1980 ed il 1985 per ciascun comune (1).

I risultati della stima delle probabilità di transizione e degli indici F_i , per il complesso dei 287 comuni, sono riportati nella Tab. 1. Sulla base di tali risultati si possono fare le seguenti considerazioni.

(1) Si fa osservare che, in virtù della (1), se i flussi migratori tra le G sezioni o comuni non sono eccessivi, si può ricavare $R_i(t)$ disponendo, per la sezione elettorale o comune g -esimo, del numero di elettori deceduti nell'intervallo (s, t) .

Tab. I - Risultati relativi al complesso dei comuni. Tasso di mortalità medio: 25,18%.
 Tab. Ia - Flussi in % sul numero di individui all'origine [stime di $p_{(s,t)}$, $d_{(st)}$, $p_{(t)}$] $\times 100$.

1985		1980										
		PCI	DC	PSI	MSI	PSDI	PLI	Verdi DP	Altri	Bianche Nulle Astenuti	Deceduti	Totale
PCI	78										22	100
DC		72									28	100
PSI			67								33	100
MSI				82							18	100
PSDI					5	4		3		2	30	100
PLI						79					18	100
Verdi DP						82					18	100
PSDI						2					18	100
PLI						1					18	100
Bianche Nulle Astenuti							67				32	100
Deceduti									13	53	33	100
Totale									2	73	24	100
Nuovi elettori									4	15	—	100

Tab. Ib - Flussi in % sul numero complessivo di elettori 1980 + nuovi elettori 1985.

1985		1980										
		PCI	DC	PSI	MSI	PSDI	PLI	Verdi DP	Altri	Bianche Nulle Astenuti	Deceduti	Totale
PCI	24,8										7,1	31,9
DC		14,3									5,4	19,8
PSI			5,5								2,6	8,1
MSI				2,1							0,5	2,5
PSDI					0,1	0,1			0,1		0,6	2,1
PLI						1,6		0,1			0,3	2,0
Verdi DP						0,7					0,2	0,9
Altri											0,1	0,7
Bianche Nulle Astenuti							0,5		0,5	2,0	1,2	3,8
Deceduti									0,1	3,9	1,3	5,4
Totale									0,3	3,4	—	22,0
Nuovi elettori									0,7	0,9		32,8
Totale									2,2	1,0	19,7	100,0

Tab. 1c - *Fattori esplicativi delle variazioni percentuali 1980-1985 (x100).*

Partiti	PCI	DC	PSI	MSI
Percentuale ('80)	40,96	25,35	10,39	3,27
Percentuale ('85)	40,85	23,48	12,13	4,08
Diff. ('85-'80)	-0,11	-1,87	1,74	0,81
$A = \frac{n_i(s)}{N_i(s)} [1 + T(s,t)]^{-1}$	39,76	24,61	10,09	3,17
F ₁ : nuovi elettori	-3,24	-5,27	10,25	11,70
F ₂ : attrazione altri elettori	—	—	14,45	6,69
F ₃ : perdita elect. verso altri partiti	—	—	—	-0,47
B = F ₁ + F ₂ + F ₃	-3,24	-5,27	24,71	17,92
A x B = Variaz. teorica con F ₄ =0	-1,29	-1,30	2,49	0,57
F ₄ : mortalità differenziale	2,96	-2,33	-7,44	7,53
F ₁ + F ₂ + F ₃ + F ₄	-0,28	-7,61	17,27	25,45

Resultati relativi al complesso dei 287 comuni

L'elettorato dei maggiori partiti appare caratterizzato da una bassa mobilità (Tab. 1a) e, in sostanza, le perdite di elettori sono dovute soprattutto al fattore naturale di mortalità (il tasso medio si aggira attorno al 25%, con punte del 33% per gli elettori del PSI e di BIANCHE/NULLE). Piuttosto sorprendente appare il fatto che gli elettori del PDUP, ufficialmente confluito nelle liste del PCI, sembrano invece avere votato in gran parte per DP+VERDI, nel 1985; pure interessante, anche se strana, appare l'alta percentuale di elettori del PSDI che hanno scelto di votare PSI nel 1985 (55%), tuttavia si deve tenere presente che le stime sono soggette ad errori standard (non riportati per ragioni di spazio, ma comunque bassi in questo caso). Inoltre la non omogeneità delle osservazioni può produrre qualche risultato anomalo. Nel complesso, tuttavia, le transizioni appaiono abbastanza plausibili. Da notare infine il comportamento differenziato degli elettori che nell'80 avevano votato scheda BIANCA/NULLA, rispetto a quelli che avevano votato ASTENUTO: i primi, infatti, appaiono più propensi a mutare le loro scelte (in particolare a favore del raggruppamento degli ALTRI partiti).

L'analisi effettuata in termini dei fattori F_i, per i quattro maggiori partiti rivela quanto segue. Il PCI e la DC (più marcatamente) subiscono una flessione, mentre il PSI guadagna l'1,74% ed il MSI lo 0,81. Per quanto riguarda il fattore F₁ (attrazione nuovi elettori) per PCI e DC esso risulta negativo, mentre è positivo per PSI e MSI: questo sta ad indicare che i due maggiori partiti hanno rinnovato il proprio elettorato ad un tasso inferiore a quello medio, l'opposto vale per gli altri due. PCI e DC non riescono, poi,

ad attrarre nuovi elettori (F₂ = 0), mentre in tal senso, il PSI ed il MSI ottengono un notevole successo. Praticamente inesistenti le perdite di elettori verso altri partiti, e solo il MSI fa registrare per F₃ un valore negativo di -0,47. La somma dei rimi tre fattori rappresenta, infine, una misura sintetica, e comparabile (perché depurata dal fattore di scala costituito da $\ln(s)/N(s) [1 + T(s,t)]^{-1}$, del successo politico (od insuccesso, se negativo) dei vari partiti: il PSI è il partito che fa registrare il maggiore più sensibile (+24,71), mentre la DC è quello che subisce il maggiore insuccesso (-5,27). Se il tasso di mortalità di questi partiti fosse stato pari a quello medio dell'intero corpo elettorale (e, quindi, fosse risultato F₄ = 0), le variazioni (teoriche) subite dai partiti sarebbero state di -1,29% per il PCI, -1,30% per la DC, +2,49% per il PSI e +0,57 per il MSI. I differenti tassi di mortalità, invece, hanno prodotto i risultati che si sono effettivamente realizzati: si nota così che il PCI ha fatto registrare una perdita inferiore a quella teorica, in quanto il suo elettorato mostra un tasso di mortalità inferiore a quello medio (F₄ = +2,96), lo stesso dicasi del MSI. DC e PSI, invece, mostrano tassi di mortalità superiori a quelli medi.

Tuttavia l'elevato valore dei residui (non riportato) e quello della funzione test Q_N ($Q_N = 88618$) definita in Gori (1986 a, b) indicano che il modello non si adatta in maniera adeguata, cosa che, senza dubbio, è da ascrivere al non soddisfacimento dell'ipotesi (b), cioè al fatto che le osservazioni non sono omogenee in termini delle probabilità di transizione. Al fine di migliorare l'adattamento del modello ed individuare gruppi d'osservazioni omogenei, si è proceduto, sulla base dei residui standardizzati definiti in (41), ad applicare la procedura di classificazione descritta nel paragrafo 4, con la (48). In particolare sono stati formati 5 gruppi. La stima delle probabilità di transizione e degli indici F_i è stata effettuata, però, soltanto per 3 dei 5 gruppi in quanto negli altri 2 non si avevano sufficienti osservazioni. I risultati delle stime sono riportati più avanti nelle Tabb. 4, 5, 6(*); il cartogramma della Fig. 1 consente invece di apprezzare la dislocazione geografica dei comuni dei vari gruppi.

Per quanto riguarda la loro caratterizzazione si possono fare le seguenti considerazioni. Si notano tre grossi gruppi rispettivamente formati da 33, 77 e 166 comuni, mentre gli altri due raccolgono rispettivamente 3 ed 8 osservazioni.

Dal punto di vista geografico si nota quanto segue. Nel gruppo I (33 comuni) fanno parte Arezzo, Grosseto, Massa e comuni delle loro provin-

(*) Nelle elaborazioni relative ai gruppi individuati si è posto il vincolo che la probabilità di transizione P_{ij} , relativa al passaggio di elettori dal PSDI al gruppo PSI + PSDI + PLI, fosse tale che $P_{ij} \approx 0,33$. Questo perché sembra poco plausibile una «disaffezione» così accentuata come quella stimata sul complesso dei comuni. Va comunque detto che, data l'esiguità degli elettori del PSDI, i risultati ottenuti per i quattro maggiori partiti (PCI, DC, PSI e MSI) sono sostanzialmente identici con e senza il vincolo suddetto.

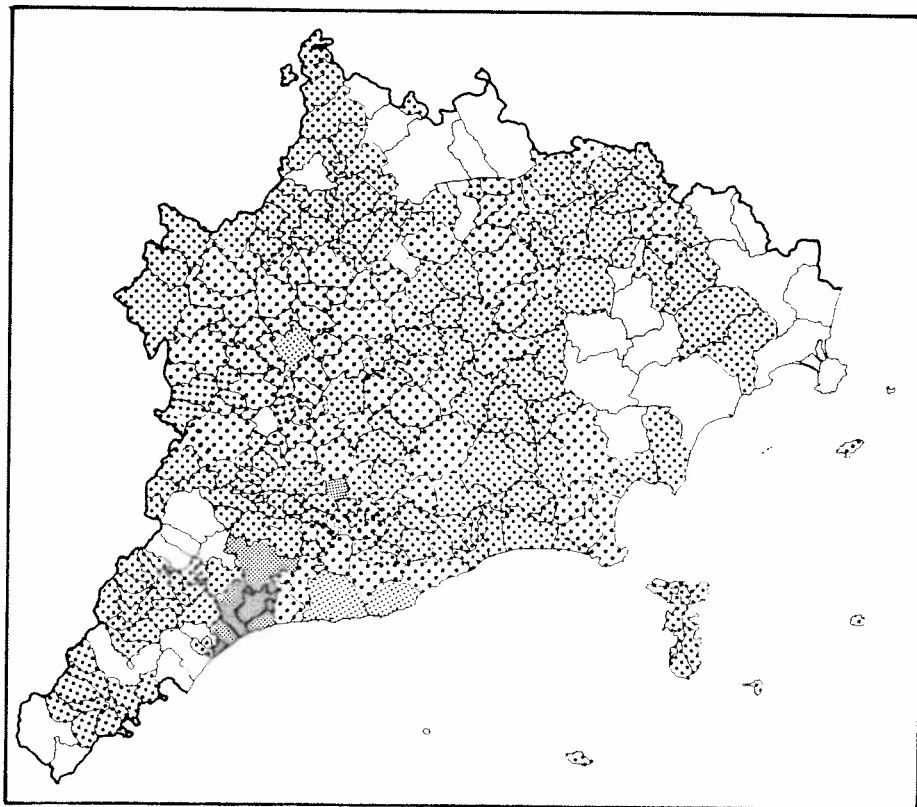


Fig. 1 - Cartogramma dei comuni toscani suddivisi nei cinque gruppi.

ce, assieme ad alcuni della provincia di Lucca. Del gruppo II (77 comuni) fa parte solo Pistoia, tra i capoluoghi di provincia, e tale gruppo appare caratterizzato, soprattutto, dal fatto di raccogliere la gran parte dei comuni della provincia di Firenze (escluso), alcuni comuni del senese e della provincia di Pisa e di Livorno. Del gruppo III (166 comuni), fanno invece parte Siena assieme alla maggioranza dei comuni della sua provincia, molti comuni della provincia di Arezzo, Pistoia, Pisa, Lucca e Massa, ed alcuni comuni del grossetano e della provincia di Livorno. Nel gruppo IV ritroviamo soltanto Firenze, Livorno e Pisa; mentre nel gruppo V Lucca ed i vicini comuni turistici, tra cui Viareggio, Forte dei Marmi, Camaiore e Montecatini.

Dal punto di vista dei risultati politici, nella Tab. 2 sono riportate, per i quattro maggiori partiti, le percentuali medie, di gruppo, conseguite nel 1980 e le variazioni 1985-1980; nella Tab. 3 sono invece contenuti i valori minimi ed il campo di variazione delle percentuali del 1980, osservati nei comuni dei singoli gruppi.

La caratterizzazione dei gruppi, in termini politici, risulta abbastanza chiara dall'esame della Tab. 2: ad esempio, il gruppo II è quello in cui il PCI conquista più del 50% dei voti, mentre per il V gruppo tale percentua-

Tab. 2 - Percentuali ottenute dai quattro maggiori partiti nelle consultazioni comunali del 1980 e variazioni 1985-1980.

Gruppi	PCI		DC		PSI		MSI	
	1980	1985	1980	1985	1980	1985	1980	1985
I	34,76	-0,19	26,09	-1,64	12,25	+3,15	3,89	+1,17
II	51,12	-0,43	21,73	-1,33	9,30	+1,28	2,13	+0,56
III	40,17	-0,01	27,34	-1,81	10,50	+1,70	3,27	+1,06
IV	37,46	-0,20	23,94	-2,21	10,22	+1,16	4,24	+0,40
V	24,24	+0,21	36,31	-3,83	11,14	+2,06	4,06	+1,73

Tab. 3 - Percentuali minime (MIN) e loro campo di variazione (CV), osservati nei comuni dei vari gruppi. Anno 1980.

Gruppi	PCI		DC		PSI		MSI	
	MIN	CV	MIN	CV	MIN	CV	MIN	CV
I	10,08	45,01	15,12	28,02	5,96	16,73	0,68	6,19
II	34,50	34,01	10,96	25,98	3,52	14,07	1,07	4,12
III	7,67	50,86	13,53	40,68	3,59	28,22	0,64	13,09
IV	34,48	11,52	18,41	7,45	8,88	2,10	3,74	2,39
V	17,71	14,00	25,55	20,15	8,36	10,50	2,62	4,88

le risulta più che dimezzata. La DC va da un minimo del 21,73% nel gruppo II, ad un massimo del 36,31% del V. Il PSI fa registrare invece percentuali varianti tra il 9,30% del II, ed il 12,25% del gruppo I, mentre il MSI varia tra il 2,13% del II ed il 4,24% del IV. Per quanto concerne le variazioni, si osserva che il PCI fa registrare ovunque leggere flessioni, tranne nel gruppo V dove si incrementa seppur in misura minima; la DC, invece, subisce ovunque forti flessioni; il PSI ed il MSI fanno registrare, al contrario, dei notevoli incrementi in tutti i gruppi.

Si fa osservare, comunque, che la partizione ottenuta dalla procedura di classificazione qui utilizzata, non tende a formare gruppi omogenei dal punto di vista della «struttura» politica, come accade invece in altri tipi di approccio (si veda ad esempio: Chiandotto e Marchetti, 1981); bensì ha lo scopo di formare gruppi di osservazioni omogenei dal punto di vista del «comportamento» politico dell'elettorato (fra due consultazioni), ovvero tende a raggruppare assieme osservazioni «governate» da matrici di probabilità di transizione simili. A riprova di questo, la Tab. 3 mostra come i gruppi formati non siano per niente omogenei dal punto di vista della struttura politica dei comuni che vi fanno parte: ad esempio, nel gruppo I, dove la percentuale media del PCI, nel 1980, è pari a 34,76, sono presenti comuni con una percentuale, per tale partito, tre volte più piccola (10,08), mentre il campo di variazione è ben di 45,01, ovvero sono compresi in I anche comuni con percentuali, per il PCI, che superano il 55%. Viceversa i gruppi risultano più omogenei dal punto del comportamento dinamico dell'elettorato. Questo è comprovato sia da un migliore adattamento del modello, nei singoli gruppi rispetto al complesso dei comuni, sia dal fatto che le probabilità di transizione appaiono abbastanza diverse da gruppo a gruppo (solo per i primi tre, comunque, è stato possibile effettuare la stima). Ad esempio, i primi tre gruppi appaiono molto differenti per quanto concerne il vettore delle probabilità di morte, $d(s,t)$; questo si riflette, tra l'altro, in ben differenziati tassi di mortalità: 21,55% per il gruppo I, 24,42% per il II e 28,55% per il III.

Si passerà adesso all'esame del comportamento dell'elettorato in termini di probabilità di transizione e degli indici proposti, gruppo per gruppo (Tabb. 4, 5 e 6) (*).

(*) Riguardo alle variazioni $n_i(t)/N(t) - n_i(s)/N(s)$, si fa rilevare che la scomposizione definita in (4) è esatta solo se si usano, al tempo t , i valori teorici di $n_i(t)$, ottenuti dall'adattamento del modello, ovvero se si usano le variazioni teoriche. Comunque, come si può osservare dalle Tabb. 1, 4, 5 e 6 le variazioni teoriche e quelle effettive sono praticamente identiche, e si notano solo lievi differenze, come, ad esempio, quella relativa al PCI nel I e III gruppo, che non superano lo 0,03%.

TAB. 4 - Gruppo I. N. comuni 33, tasso di mortalità medio: 21,55%.
TAB. 4a - Flussi in % sul numero di individui all'origine [stime di $p^*(s,t)$, $d(s,t)$, $p^*(t)$] $\times 100$

1985	1980	PCI	DC	PSI	MSI	PSDI	PSDI	PLI	Verdi	DP	Altri	Bianche Nulle	Astenuti	Deceduti	Totale
76	76	34	34	14	24	7	23	18	22	100	100	100	100	100	100
83	83	31	31	14	24	7	23	18	22	100	100	100	100	100	100
71	71	32	32	14	24	7	23	18	22	100	100	100	100	100	100
86	86	32	32	14	24	7	23	18	22	100	100	100	100	100	100
50	50	32	32	14	24	7	23	18	22	100	100	100	100	100	100
75	75	32	32	14	24	7	23	18	22	100	100	100	100	100	100
49	49	32	32	14	24	7	23	18	22	100	100	100	100	100	100
12	12	32	32	14	24	7	23	18	22	100	100	100	100	100	100
2	2	32	32	14	24	7	23	18	22	100	100	100	100	100	100
1	1	32	32	14	24	7	23	18	22	100	100	100	100	100	100
2	2	32	32	14	24	7	23	18	22	100	100	100	100	100	100
18	18	32	32	14	24	7	23	18	22	100	100	100	100	100	100
14	14	32	32	14	24	7	23	18	22	100	100	100	100	100	100
14	14	32	32	14	24	7	23	18	22	100	100	100	100	100	100
14	14	32	32	14	24	7	23	18	22	100	100	100	100	100	100
17	17	32	32	14	24	7	23	18	22	100	100	100	100	100	100
24	24	32	32	14	24	7	23	18	22	100	100	100	100	100	100

Tab. 4b - Flussi in % sul numero complessivo di elettori 1980 + nuovi elettori 1985.

1985		1980												
		PCI	DC	PSI	MSI	PSI	MSI	PSI	MSI	Verdi	Altri	Bianche Nulle Astenuti	Deceduti	Totale
PCI	21,2	17,2									0,1	6,6	27,8	
DC			17,2									3,5	20,8	
PSI				6,9								2,9	9,8	
MSI					2,7							0,4	3,1	
PSDI						1,3						0,5	2,6	
PR1						2,6						0,5	3,5	
PLI				0,3		0,4						0,1	0,9	
DP				0,4		0,1						0,2	0,8	
ppup												0,2	0,7	
Bianche-Nulle				0,1		0,2						2,2	4,1	
Astenuti												4,5	5,8	
Nuovi elettori				6,9		4,9					0,4	3,6	20,1	
Totale	28,6	20,2	12,7	4,2	4,5	1,6	0,6	10,5	17,2				100,0	

Tab. 4c - Fattori esplicativi delle variazioni percentuali 1980-1985 ($\times 100$).

Fattori		Partiti	DC	PSI	MSI
Percentuale ('80)	34,76	26,09	12,25	3,89	
Percentuale ('85)	34,55	24,43	15,27	5,05	
Diff. ('85-'80)	-0,22	-1,67	3,02	1,16	
$A = \frac{N(s)}{n(s)} [1 + T(s)]^{-1}$	33,53	25,17	11,81	3,75	
F ₁ : nuovi elettori	-0,34	-11,97	25,08	22,87	
F ₂ : attrazione altri partiti	1,79	1,28	8,43	0,24	
F ₃ : perdita elett. verso altri partiti	-	-0,45	-	-	
B = F ₁ + F ₂ + F ₃	1,46	-11,13	33,51	23,11	
A × B = Variaz. teorica con F ₄ = 0	0,49	-2,80	3,96	0,87	
F ₄ : mortalità differenziale	-2,10	4,51	-7,91	7,78	
F ₁ + F ₂ + F ₃ + F ₄	-0,65	-6,62	25,60	30,89	

Tab. 5 - Gruppo II. N. comuni 77. tasso di mortalità medio: 24,42%.

Tab. 5a - Flussi in % sul numero di individui all'origine [stima di p₁(s,t), d(s,t), p₂(t)] × 100.

1985		1980										
		PCI	DC	PSI	MSI	PSDI	PLI	Verdi	Altri	Bianche Nulle Astenuti	Deceduti	Totale
PCI	73											100
DC			83									100
PSI				68						8		100
MSI					75							100
PSDI				19		33		15	16			100
PR1				4		73		5				100
PLI						63		20				100
DP						68		49				100
ppup												100
Bianche-Nulle				7		9		1	4	65		100
Astenuti						2		6		56		100
Nuovi elettori				14		2		3	1	13		100

Gruppo I: 33 comuni

In questo insieme di comuni, caratterizzato da una delle più basse percentuali per il PCI, PSI e MSI sono i partiti che fanno registrare il maggior successo politico in termini della somma dei tre indici $F_1 + F_2 + F_3$, rispettivamente pari a 34,71 e 23,14, mentre la DC totalizza -10,83 ed il PCI soltanto 0,74. Se si analizzano più in particolare i singoli fattori, si osserva che il successo di PSI e MSI, e l'insuccesso della DC, sono da attribuire, soprattutto, al fattore F_1 , relativo ai nuovi elettori; il MSI, in particolare, sembra esercitare una forte attrazione nei confronti di tale categoria. Il PCI, con $F_1 = 0,01$, invece, riesce a rinnovare il proprio elettorato allo stesso tasso medio dell'interno corpo elettorale. Per quanto riguarda il fattore F_2 , relativo all'attrazione esercitata dal singolo partito nei confronti degli altri elettori, è il PSI che fa registrare il maggior successo, mentre PCI e DC sono a livelli molto bassi, anche se positivi. Il PSI acquista voti essenzialmente dal PSDI, il PCI da DP e PDUP, mentre la DC dal PLI. Circa il fattore F_3 , la DC subisce leggere perdite, a favore della lista degli ALTRI partiti, mentre per gli altri tre partiti $F_3 = 0$. Per quanto concerne F_4 , gli elettori del PCI e del PSI mostrano un tasso di mortalità superiore a quello medio, mentre il contrario accade per quelli della DC e del MSI: qualora tali tassi fossero stati uguali a quello medio, il PCI, anziché una flessione, avrebbe fatto registrare un lieve incremento, per la DC la flessione sarebbe stata ancora più accentuata, il PSI, invece, avrebbe fatto registrare un successo maggiore, mentre l'incremento del MSI sarebbe stato leggermente più contenuto.

Gruppo II: 77 comuni

In tale gruppo di comuni, caratterizzato dalla più alta percentuale per il PCI, sono, di nuovo, PSI e MSI i partiti che fanno registrare il maggior successo politico. Anche il PCI, tuttavia, mostra un valore positivo per la somma dei tre fattori (+1,64), mentre la DC totalizza un -13,97. Per quanto concerne i singoli fattori, si osserva un buon successo del PSI anche nei confronti dei giovani elettori, ma anche il MSI e il PCI riescono a rinnovarsi ad un tasso superiore a quello medio. Viceversa la DC, anche in questo gruppo, appare perdere sensibilmente terreno nei confronti dei giovani elettori. Per quanto riguarda il fattore F_2 , sono il MSI ed il PSI che fanno registrare il maggior successo, mentre il PCI riceve un lieve flusso di voti dal PDUP. Circa il fattore F_3 , solo il MSI subisce una leggera perdita a favore di BIANCHE + NULLE + ASTENUTI. Per quanto concerne F_4 , gli elettori del PCI e del PSI mostrano un tasso di mortalità superiore a quello medio, mentre il contrario accade per quelli della DC e del MSI, proprio come nei comuni del gruppo I.

Tab. 6c - Fattori esplicativi delle variazioni percentuali 1980-1985 ($\times 100$).

Partiti		Fattori	
PCI	PSI	MSI	
40,17	27,34	10,50	3,27
40,13	25,51	12,20	4,31
-0,04	-1,82	1,70	1,04
$A = \frac{N(s)}{n(s)} [1 + T(s,t)]^{-1}$	39,23	26,70	10,26
	-2,07	-7,54	20,15
	-	-	3,67
	-	-	5,25
	-	-	-
	-2,07	23,82	25,52
	-0,81	2,44	0,81
	1,96	0,71	-7,23
	-6,83	16,59	32,58

Percentuale ('80)
Percentuale ('85)
Diff. ('85-'80)
 $A = \frac{N(s)}{n(s)} [1 + T(s,t)]^{-1}$
 F_1 : nuovi elettori
 F_2 : attrazione altri elettori
 F_3 : perdita elett. verso altri partiti
 $B = F_1 + F_2 + F_3$
 $A \times B = \text{Variaz. teorica con } F_4 = 0$
 F_4 : mortalità differenziale
 $F_1 + F_2 + F_3 + F_4$

Tab. 6b - Flussi in % sul numero complessivo di elettori 1980 + nuovi elettori 1985.

1985		1980									
PCI	DC	PSI	MSI	PSDI	PLI	DP	Verdi	Altri	Bianche Nulle	Astenuti	Totale
22,6	15,1	5,2	2,0	0,7	0,8	0,2	0,7	0,2	0,4	3,2	8,1
8,8	4,9	4,1	1,3	0,2	0,4	0,2	0,4	0,2	3,8	1,4	23,6
31,4	20,0	9,5	3,4	2,0	1,8	0,8	0,8	0,4	3,8	1,4	100,0

In questo gruppo di comuni sono PSI e MSI che fanno registrare il maggior successo politico in termini della somma dei tre indici $F_1 + F_2 + F_3$. Decisamente negativo, invece, il risultato per la DC, pure negativo quello del PCI. Questi due ultimi partiti, infatti, non riescono ad attrarre una quota sufficiente di giovani elettori (F_1 è negativo). Viceversa PSI e MSI fanno registrare un ampio successo su questo fronte, riuscendo ad attrarre anche elettori di altri partiti. Praticamente inesistenti i flussi in uscita dai quattro maggiori partiti, verso le altre liste. Si osserva, infine, che in questo gruppo solo gli elettori del PSI presentano una mortalità superiore alla media.

6. Conclusioni

È chiaro che i fattori F_1 (attrazione di nuovi elettori) ed F_4 (mortalità differenziale), risultano, nel lungo periodo, interrelati, nel senso che il partito che riesce ad attrarre consistenti fette di giovani elettori in una consultazione, beneficerà presumibilmente di un tasso di mortalità inferiore alla media nella consultazione successiva, sempre che riesca a mantenere i voti acquisiti. Ora, per quanto riguarda ad esempio il PCI, la cui dinamica appare legata essenzialmente ai fattori F_1 ed F_4 (essendo praticamente inesistenti flussi da e verso altri partiti), sulla base dei risultati ottenuti si possono azzardare le seguenti previsioni (che non considerano ovviamente nessun fattore di natura politica e che pertanto vanno prese con le dovute cautele).

Nel gruppo I, essendo stata scarsa l'attrazione di nuovi elettori, il tasso di mortalità, già alto, dovrebbe crescere ulteriormente, cosicché, qualora continuassero le tendenze in atto, il partito in oggetto, nelle prossime consultazioni dovrebbe subire un'ulteriore flessione.

Nel gruppo II, l'acquisto di nuovi elettori dovrebbe fare diminuire il tasso di mortalità, facendolo tendere a quello medio, per cui, in questo gruppo, si dovrebbe osservare un leggero incremento del PCI, se continuassero nei confronti dei nuovi elettori.

Nel gruppo III, la scarsa attrazione di nuovi elettori dovrebbe fare aumentare il tasso di mortalità, cosicché, si dovrebbe registrare, prossimamente, una lieve flessione del PCI.

Considerazioni analoghe possono essere fatte anche per gli altri partiti.

Gli indici introdotti e l'applicazione effettuata mostrano come la dinamica elettorale sia suscettibile di spiegazione in termini di semplici fattori, in parte connessi ad elementi di natura politica (attrazione di

giovani elettori), e, in parte, ad elementi di carattere demografico (mortalità differenziale). In particolare, per i maggiori partiti, almeno nella situazione analizzata, l'attrazione esercitata nei confronti dei giovani elettori e la mortalità differenziale appaiono in grado di spiegare la totalità delle variazioni osservate tra due consultazioni.

La metodologia impiegata per la stima degli indici ha il pregio di utilizzare soltanto i risultati elettorali e i dati di natura demografica relativi ad un insieme di sezioni elettorali, o comuni, od altre unità geografiche. Tuttavia, le ipotesi che consentono di pervenire a tali stime sono piuttosto restrittive. In primo luogo quella di assenza di flussi migratori; quindi quella che le probabilità di transizione di un elettore da un partito all'altro dipendano solo dal partito di origine; infine quella di omogeneità di tali probabilità tra le unità geografiche considerate.

La non rispondenza del reale a tali ipotesi genera ovviamente qualche dubbio sui risultati ottenibili, ed è un problema che necessita di ulteriori approfondimenti. Per quanto riguarda il problema dei flussi migratori, comunque, questo può essere risolto o limitando l'analisi a quelle unità in cui tali flussi non sono molto consistenti, ovvero considerando consultazioni elettorali abbastanza ravvicinate nel tempo. Il problema della disomogeneità dei parametri può invece trovare soluzione applicando la procedura di analisi dei residui descritta nel paragrafo 4. Resta comunque l'ipotesi, abbastanza astratta, sul comportamento degli elettori, ovvero che sia soltanto lo stato (partito) di appartenenza al tempo iniziale s , che determina le varie probabilità di transizione da un partito all'altro. Tale ipotesi, tuttavia, appare costituire il prezzo necessario da pagare per l'uso di dati così poco «informativi» come quelli impiegati.

Un possibile superamento di tale ipotesi restrittiva è costituito dall'utilizzazione di variabili esplicative nella stima delle probabilità di transizione, secondo la metodologia proposta da Brown e Payne (1986). L'individuazione di tali variabili è il problema principale in tale impostazione, che appare assai interessante e promettente di risultati.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- AMATO V. (1962), «La misura statistica della mobilità elettorale», *Statistica*, 3, p. 363.
 ANDERSON T.W., GOODMAN L. (1957), «Statistical Inference about Markov Chains», *Annals of Mathematical Statistics*, 28, p. 89.
 ARTHANARI T.S., DODGE Y. (1981), *Mathematical Programming in Statistics*, J. Wiley.
 BARBAGLI M., CORBETTA P., PARISI A., SCHIADEE H.M.A. (1979), *Fluidità elettorale e classi sociali in Italia*, Il Mulino, Bologna.
 BARTHOLOMEW D.J. (1973), *Stochastic Models for Social Processes*, J. Wiley.
 BROWN P., PAYNE C. (1975), «Election night forecasting», *Journal of the Royal Statistical Soc. A*, 138, part. 4, p. 463.

- BROWN P., PAYNE C. (1986), «Aggregate Data, Ecological Regression and Voting Transitions», *Journal of the American Statistical Association*, 81, 394, p. 452.
- CHIRANDOTTO B., MARCHIETTI G.M. (1981), «L'analisi dei gruppi», *Quaderni dell'Osservatorio elettorale*.
- FABRIS L. (1979), «Metodi statistici per le previsioni elettorali», *Rivista di Statistica Applicata*, 12, p. 149.
- FORGY E.W. (1965), «Cluster analysis of multivariate data: efficiency versus interpretability of classifications», *Biometrics*, 21.
- GORI E. (1986 a), «Processi markoviani e dati aggregati. Stima ed applicazioni», *Atti della XXXIII Riunione Scientifica della S.I.S.*, Bari.
- GORI E. (1986 b), *Processi markoviani e dati aggregati. Una metodologia per l'analisi della mobilità elettorale*, Regione Toscana, Serie Rapporti di Ricerca (in corso di pubblicazione).
- GRAYBILL F.A. (1983), *Matrices with Application in Statistics 2d ed.*, Wadsworth int.
- HENDERSON H.V., SEARLE S.R. (1979), «Vec and vech operators for matrices, with some uses in Jacobians and multivariate statistics», *The Canadian Journal of Statistics*, 7, p. 65.
- HENDERSON H.V., SEARLE S.R. (1981), «The vec-permutation matrix», *Linear and Multilinear Algebra*, 9, p. 271.
- JAGANNATHAN R. (1966), «A simplex-type algorithm for linear and quadratic programming», *Econometrica*, 34, p. 460.
- LEBART L., MORINEAU A., WARWICK K.M. (1984), *Multivariate Descriptive Statistical Analysis*, J. Wiley.
- LEE J.F., JUDGE G.G., ZELNER A. (1970), *Estimating the Parameters of the Markov Probability Model from Aggregated Time-Series Data*, North Holland.
- MEDHI J. (1982), *Stochastic Processes*, J. Wiley.
- RAO R. (1973), *Linear Statistical Inference and its Applications*, J. Wiley.
- REY G., TRUHL H. (1966), «A quadratic programming approach to the estimation of transition probabilities», *Management Science*, 12, p. 714.
- WOLFE P. (1959), «The simplex method for Quadratic Programming», *Econometrica*, 27, p. 382.

MOBILITÀ E FEDELITÀ ELETTORALE
NEGLI ANNI OTTANTA.
UN'ANALISI COMPARATA SU DATI
AGGREGATI E DI SURVEY

di ROBERTO BIORCIO e PAOLO NATALE